Ψηφιακές Υπογραφές

Παναγιώτης Γροντάς
ΕΜΠ

Κρυπτογραφία

2024 - 2025

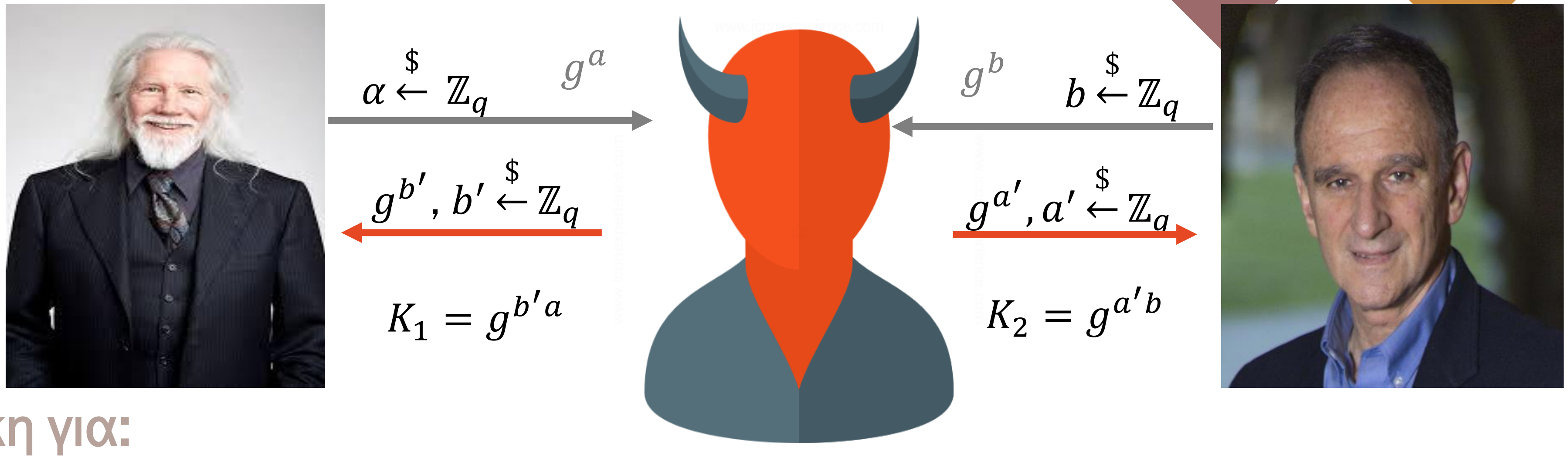
Περιεχόμενα

- Ορισμός - Μοντελοποίηση
- Ψηφιακές Υπογραφές RSA
  - Επιθέσεις - Παραλλαγές
  - Το μοντέλο του τυχαίου μαντείου
- Ψηφιακές Υπογραφές DLP
  - Επιθέσεις - Παραλλαγές
- Το πρόβλημα της αυθεντικότητας κλειδιών
- Προχωρημένα Σχήματα

Ορισμός - Μοντελοποίηση

Motivation

- Ανταλλαγή κλειδιού Diffie-Hellman με ενεργούς αντιπάλους
  - MiTM attacks



- Ανάγκη για:
  - **Ακεραιότητα:** Το μήνυμα είναι ακριβώς αυτό που έστειλε ο αποστολέας.
  - **Αυθεντικότητα:** Το μήνυμα στάλθηκε από αυτόν που φαίνεται ότι στάλθηκε

- MACs: Μειονεκτήματα συμμετρικής κρυπτογραφίας

Ψηφιακές Υπογραφές

- Ασύμμετρα MACs
- Αποστολέας S (υπογράφων)
- Παραλήπτης V (επαληθεύων)
- Ο αποστολέας S
  - Εκτελεί αλγόριθμο $KGen$ και παράγει ζεύγος κλειδιών (vk, sk)
  - Το κλειδί υπογραφής sk παραμένει ιδιωτικό.
  - Το κλειδί επαλήθευσης vk δημοσιοποιείται

- Υπογραφή:
  - Μετασχηματισμός μηνύματος με τη βοήθεια του κλειδιού
  - Η υπογραφή εξαρτάται από το μήνυμα
  - Αλγόριθμος $Sign(sk, m) \rightarrow \sigma$
- Επαλήθευση:
  - Αλγόριθμος $Vf(pk, m, \sigma) \rightarrow 0/1$
  - Χρειάζεται και το μήνυμα
- Μετάδοση:
  - Οποιαδήποτε αλλοίωση θα γίνει αντιληπτή, γιατί θα χαλάσει την αντιστοιχία μηνύματος υπογραφής

Πλεονεκτήματα

- Εύκολη διανομή κλειδιού
- Δημόσια επαληθευσιμότητα
  - Δεν επαληθεύει μόνο ο V
  - Οποιοσδήποτε αποκτήσει το δημόσιο κλειδί του S
- Μη αποκήρυξη (non – repudation)
  - Κανείς δεν μπορεί να αρνηθεί την υπογραφή του
  - Τα κλειδιά sk, vk συνδέονται μαθηματικά
- Αυθεντικοποίηση
  - Με την υπόθεση της κατοχής του ιδιωτικού κλειδιού

- Προηγμένες Λειτουργίες
- Ιδιωτικότητα
  - Τυφλές υπογραφές
- Ανωνυμία
  - Ομαδικές υπογραφές, υπογραφές δακτυλίου
- Ελεγχόμενη επαληθευσιμότητα
  - Καθορισμένος επαληθευτής

Μειονεκτήματα

- Αυθεντικότητα κλειδιού
  - Πώς είμαστε σίγουροι ότι το δημόσιο κλειδί αντιστοιχεί όντως στην ταυτότητα του S (που φαίνεται στον δημόσιο κατάλογο)
  - Πώς είμαστε σίγουροι ότι το ιδιωτικό κλειδί ήταν όντως στην κατοχή του S κατά τη δημιουργία της υπογραφής
- Οι ψηφιακές υπογραφές λύνουν τα προβλήματα
  - Ανταλλαγής κλειδιού
  - Αυθεντικότητας μηνύματος
  - Ακεραιότητας μηνύματος
- Οι ψηφιακές υπογραφές δημιουργούν το πρόβλημα
  - Αυθεντικότητας κλειδιού
- Μαθηματικές και μη λύσεις

Ορισμός

- Σχήμα υπογραφής: Μια τριάδα αλγορίθμων
  - $KGen(1^\lambda) \rightarrow (vk, sk)$
  - $Sign(sk, m) \rightarrow \sigma,\ \mathbf{m} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^*$
  - $Vf(pk, m, \sigma) \rightarrow 0/1$
- Έγκυρη υπογραφή
  - $Vf(pk, m, \sigma) = 1$
- Ορθότητα
  - $Vf\big(pk, m, Sign(sk, m)\big) = 1,\ \forall (vk, sk) \leftarrow KGen(1^\lambda)$

Πλαστογράφηση

Πλαστογραφηση (Forgery)

Ο $\mathcal{A}$ παράγει μια έγκυρη υπογραφή για κάποιο μήνυμα **χωρίς τη συμμετοχή του $\boldsymbol{S}$** – δηλ. του κατόχου του ιδιωτικού κλειδιού που αντιστοιχεί στο δημόσιο που την επαληθεύει

- Καθολική (universal)
  - Ο $\mathcal{A}$ παράγει μια έγκυρη υπογραφή για **οποιοδήποτε** μήνυμα
  - Ισοδυναμεί με την κατοχή του ιδιωτικού κλειδιού του S
- Επιλεκτική (selective)
  - Ο $\mathcal{A}$ παράγει μια έγκυρη υπογραφή για ένα συγκεκριμένο μήνυμα της επιλογής του
  - Το μήνυμα επιλέγεται ΠΡΙΝ την επίθεση
  - **Πρακτικά: Το μήνυμα πρέπει να έχει κάποιες προδιαγραφές. Π.χ.**
    - **Να έχει νόημα σε κάποιο πρωτόκολλο**
    - **Να έχει συγκεκριμένες ιδιότητες**
- Υπαρξιακή (existential)
  - Ο $\mathcal{A}$ παράγει μια έγκυρη υπογραφή για ένα συγκεκριμένο μήνυμα της επιλογής του
  - Το μήνυμα επιλέγεται **ελεύθερα**
  - **Πρακτικά:**
    - μπορεί να αποτελείται και από τυχαία bits.
    - π.χ. έξοδος hash

Αντίπαλοι

- Παθητικός (passive)
  - Γνωρίζει μόνο το κλειδί επαλήθευσης και ζεύγη μηνυμάτων, έγκυρων υπογραφών
- Ενεργός (active)
  - Μπορεί να αποκτήσει έγκυρες υπογραφές σε μηνύματα της επιλογής του (chosen message attack)
- Ενεργός με προσαρμοστικότητα (adaptive active)
  - Μπορεί να αποκτήσει έγκυρες υπογραφές σε μηνύματα της επιλογής του που εξαρτώνται από προηγούμενες έγκυρες υπογραφές

Ασφάλεια Ψηφιακών Υπογραφών

Ασφάλεια ως προς

- τον δυνατότερο αντίπαλο (adaptive adversary)
- ευνοϊκότερη επίθεση (chosen message attack)
- ευκολότερη συνθήκη νίκης (existential unforgeability)

EUF-CMA

Ένα σχήμα υπογραφής είναι ασφαλές αν δεν επιτρέπει σε κανέναν ενεργό αντίπαλο με προσαρμοστικότητα να επιτύχει υπαρξιακή πλαστογράφηση σε επίθεση επιλεγμένων μηνυμάτων

Ασφάλεια Ψηφιακών Υπογραφών

Το παιχνίδι πλαστογράφησης Forge-Game για EUF-CMA

- $(vk, sk) \leftarrow KGen(1^\lambda)$
- $Q = \{(m_i, \sigma_i)\}_{i=1}^{poly(\lambda)} \leftarrow \mathcal{A}^{Sign}(vk)$
- $(m^*, \sigma^*) \leftarrow \mathcal{A}(vk, Q)$
- If $\boldsymbol{Vf(pk, m^*, \sigma^*) = 1}$ **and** $\boldsymbol{m^* \notin Q}$ then return 1
- Else return 0

Ένα πρωτόκολλο υπογραφών $\Pi = (KGen, Sign, Vf)$ παρέχει ασφάλεια EUF-CMA αν $\forall PPT\ \mathcal{A}$:

$$\Pr\left[Forge - Game_{\mathcal{A},\Pi}(1^\lambda) = 1\right] \leq negl(\lambda)$$

Ο αντίπαλος απλά δεν πρέπει να έχει δει το συγκεκριμένο ζεύγος μηνύματος υπογραφής
Μπορεί να φτιάξει νέα πλαστογράφηση για $\boldsymbol{m}^*$
π.χ μέσω malleability

$\boldsymbol{m}^*$ είναι νέο μήνυμα
Δεν πρέπει να έχει ζητηθεί υπογραφή καθόλου γι’ αυτό

Παραλλαγή *strong* EUF-CMA (SUF-CMA):
Ορισμός: όμοιος με **EUF-CMA**
Συνθήκη νίκης $\mathcal{A}$

$$Vf(pk,, m^*, \sigma^*) = 1 \text{ and } (m,^* \sigma^*) \notin Q$$

SUF-CMA security $\Rightarrow$ EUF-CMA security

Υπογραφές RSA

Υπογραφές RSA

- Δημιουργία Κλειδιών:
  - $KGen(1^\lambda) \rightarrow (sk, vk) = (d, (e, n))$
  - $n = p \cdot q$
  - $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
  - $d = e^{-1} \, mod \, \varphi(n)$
- Υπογραφή – ‘*Αποκρυπτογράφηση*’ RSA
  - $Sign(d, m) \rightarrow m^d \bmod n$
- Επαλήθευση – ‘*Κρυπτογράφηση*’ RSA
  - $Vf((e, n), m, \sigma) \rightarrow \sigma^e = m \pmod{n}$

Ορθότητα: $\sigma^e = (m^d)^e = m^{ed} = m \pmod{n}$ λόγω Θ. Euler

Καθόλου Ασφάλεια!

Επίθεση χωρίς μήνυμα

- Είσοδος $\mathcal{A}$: $vk = (e, n)$
- $Q = \emptyset$ δεν υποβάλλεται κανένα μήνυμα για υπογραφή
- Ο $\mathcal{A}$ επιλέγει $\sigma^* \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_n^*$
- Εφαρμόζει το κλειδί επαλήθευσης και υπολογίζει ${\sigma^*}^e \rightarrow m^* \in \mathbb{Z}_n^*$
- Το σ^* είναι πλαστογράφηση για το m^*
  - αφού ικανοποιεί τη σχέση επαλήθευσης
  - Το m^* δεν έχει ρωτηθεί στο Q
- Ο $\mathcal{A}$ ´ κερδίζει πάντα $\Pr[Forge - Game_{\mathcal{A},\mathrm{RSA}}(1^\lambda) = 1] = 1$

Έχει νόημα η επίθεση; Ναι, μπορεί m^* να παράγεται από κάποια δυαδική κωδικοποίηση. Με επαναλήψεις, μπορούν να βρεθούν m^* όπου κάποια bits μπορεί να αντιστοιχούν σε έγκυρα τμήματα μηνυμάτων

Chosen message attack - malleability

- Είσοδος $\mathcal{A}$: $vk = (e, n)$
- Στόχος: Υπογραφή για κάποιο $m^* \in \mathbb{Z}_n^*$
- Ο $\mathcal{A}$ επιλέγει $m_1 \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_n^*$ (Ισχύει $m_1^{-1} \in \mathbb{Z}_n^*$)
- Ρωτάει το μαντείο υπογραφής για υπογραφές στα $m_1, m_2 = {}^{m^*}/_{m_1}$
- $Q = \{(m_1, \sigma_1), (m_2, \sigma_2)\}$
- Υπολογισμός $\sigma^* = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = m_1^d \cdot m_2^d = \left(m_1 \cdot {}^{m^*}/_{m_1}\right)^d = m^{*d}$
- Το ζεύγος (m^*, σ^*) αποτελεί έγκυρη υπογραφή και $(m^*, \sigma^*) \notin Q$
- Ο $\mathcal{A}$ ΄ κερδίζει πάντα $\Pr\left[Forge - Game_{\mathcal{A},\mathrm{RSA}}\left(1^\lambda\right) = 1\right] = 1$

Chosen message attack - blinding

- Είσοδος $\mathcal{A}$: $vk = (e, n)$
- Στόχος: Υπογραφή για κάποιο $m^* \in \mathbb{Z}_n^*$
- Ο $\mathcal{A}$ επιλέγει $r \leftarrow \$ \mathbb{Z}_n^*$
- Ρωτάει το μαντείο υπογραφής για υπογραφή στο $m = m^* r^e$ και λαμβάνει την υπογραφή $\sigma = (m^* r^e)^d = m^{*d} r$
- $Q = \{(m, \sigma)\}$
- Υπολογισμός $\sigma^* = \sigma^d \cdot r^{-1} = m^{*d}$
- Το ζεύγος (m^*, σ^*) αποτελεί έγκυρη υπογραφή και $(m^*, \sigma^*) \notin Q$
- Ο $\mathcal{A}$ κερδίζει πάντα $\Pr\left[Forge - Game_{\mathcal{A},\mathrm{RSA}}(1^\lambda) = 1\right] = 1$

Υπογραφές RSA – FDH (Full Domain Hash)

- Δημιουργία Κλειδιών:
  - $KGen(1^\lambda) \to (sk, vk) = (d, (e, n))$
  - $n = p \cdot q$
  - $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
  - $d = e^{-1} \, mod \, \varphi(n)$
  - Επιλογή $H: \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_n^*$ με δυσκολία εύρεσης συγκρούσεων
  - Πρακτικά: $FDH(m) = H(m||0)|| \, H(m||1)|| \ \cdots$
- Υπογραφή – Αποκρυπτογράφηση RSA
  - $Sign(d, m) \to \boldsymbol{H(m)}^d \bmod n$
- Επαλήθευση – Κρυπτογράφηση RSA
  - $Vf((e, n), m, \sigma) \to \sigma^e = \boldsymbol{H(m)} (\mathrm{mod\ n})$

Πλεονέκτημα:
Υπογραφή συμβολοσειρών και όχι μόνο στοιχείων $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}^*$

Ορθότητα: $\sigma^e = \left(\boldsymbol{H(m)}^d\right)^e = \boldsymbol{H(m)}^{ed} = \boldsymbol{H(m)} (\mathrm{mod\ n})$ λόγω Θ. Euler

Υπογραφές RSA – FDH (Full Domain Hash)

- No message attack
  - Είσοδος $\mathcal{A}$: $vk = (e, n)$
  - $Q = \emptyset$ δεν υποβάλλεται κανένα μήνυμα για υπογραφή
  - Ο $\mathcal{A}$ επιλέγει $\sigma^* \leftarrow \$\, \mathbb{Z}_n^*$
  - Εφαρμόζει το κλειδί επαλήθευσης και υπολογίζει ${\sigma^*}^e \rightarrow H(m)^* \in \mathbb{Z}_n^*$
  - Για να παράξει το m^*, θα πρέπει να μπορεί να αντιστρέψει την H.
- Chosen message attack
  - Είσοδος $\mathcal{A}$: $vk = (e, n)$
  - Στόχος: Υπογραφή για κάποιο $m^* \in \mathbb{Z}_n^*$
  - Ο $\mathcal{A}$ επιλέγει $m_1 \leftarrow \$\, \mathbb{Z}_n^*$ (Ισχύει $m_1^{-1} \in \mathbb{Z}_n^*$)
  - Ρωτάει το μαντείο υπογραφής για υπογραφές στα $m_1, m_2 = {}^{m^*}\!/_{m_1}$
  - $Q = \{(m_1, \sigma_1), (m_2, \sigma_2)\}$
  - Υπολογισμός $\sigma^* = \sigma_1 \cdot \sigma_2 = H(m_1)^d\, H(m_2)^d$

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH

- Αρκούν οι ιδιότητες των συναρτήσεων σύνοψης?
  - Pre-image resistance
  - Second Pre-image resistance
  - Collision Resistance
- ΌΧΙ
  - Χρειάζεται κάτι ισχυρότερο
    - Μπορεί να ταυτίζονται τμήματα δύο hash π.χ.
  - **Χρειάζεται η H να συμπεριφέρεται ως τυχαία συνάρτηση.**
    - Απόδειξη στο μοντέλο του τυχαίου μαντείου (M. Bellare, P. Rogaway – 1993)

Mihir Bellare and Phillip Rogaway. 1993. Random oracles are practical: a paradigm for designing efficient protocols. In Proceedings of the 1st ACM conference on Computer and communications security (CCS '93). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 62–73. https://doi.org/10.1145/168588.168596

Το μοντέλο του τυχαίου μαντείου

Μοντελοποίηση τυχαίας συνάρτησης

Πώς θα φτιάχναμε μια πραγματικά τυχαία συνάρτηση:

Input (n bits)	Output ($l(n)$ bits)
0000000…00000000	Συμβολοσειρά με πιθανότητα εμφάνισης $1/l(n)$
0000000…00000001	Συμβολοσειρά με πιθανότητα εμφάνισης $1/l(n)$
0000000…00000010	Συμβολοσειρά με πιθανότητα εμφάνισης $1/l(n)$
0000000…00000011	Συμβολοσειρά με πιθανότητα εμφάνισης $1/l(n)$
…..	…..
1111111…11111111	Συμβολοσειρά με πιθανότητα εμφάνισης $1/l(n)$

https://crypto.stackexchange.com/questions/879/what-is-the-random-oracle-model-and-why-is-it-controversial/880

https://blog.cryptographyengineering.com/2011/10/08/what-is-random-oracle-model-and-why-2/

Το μοντέλο του τυχαίου μαντείου

- Όμως είναι πρακτικά αδύνατο να κατασκευαστεί αποδοτικά
  - $H: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^{l(n)}$ με $\Pr[H(x) = h] = \frac{1}{2^{l(n)}}$
  - Θα θέλαμε 2^n ανεξάρτητες αποτιμήσεις
  - Εκθετική αποθήκευση και αποτίμηση
  - Επίσης συνήθως $H: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^{l(n)}$
- Τυχαίο μαντείο: αφαίρεση τυχαίας συνάρτησης

Το μοντέλο του τυχαίου μαντείου

- Τυχαίο μαντείο: αφαίρεση τυχαίας συνάρτησης
  - Μαύρο κουτί - απαντάει σε ερωτήσεις
  - (Τέλεια) Ασφάλεια στο κανάλι επικοινωνίας (μοντελοποίηση τοπικής αποτίμησης)
  - Είναι συνάρτηση (ίδια είσοδος - ίδια έξοδος σε κάθε κλήση)
  - Είναι συνάρτηση σύνοψης (υπάρχουν συγκρούσεις – αλλά είναι δύσκολο να βρεθούν
- Δυναμική κατασκευή - Lazy Evaluation
  - Εσωτερικός πίνακας - αρχικά άδειος
  - Για κάθε ερώτηση: έλεγχος αν έχει ήδη απαντηθεί
  - Αν ναι, τότε ανάκτηση της απάντησης
  - Αν όχι, απάντηση με τυχαία τιμή και αποθήκευση για μελλοντική αναφορά

Αποδείξεις στο μοντέλο τυχαίου μαντείου

- Ο $\mathcal{A}$ **νομίζει** ότι αλληλεπιδρά με το τυχαίο μαντείο
- Στην πραγματικότητα το προσομοιώνει η αναγωγή
- Μπορούμε να μάθουμε τις ερωτήσεις του $\mathcal{A}$
- Μπορούμε να προγραμματίσουμε τις απαντήσεις ώστε να εκμεταλλευτούμε την ύπαρξη του αντιπάλου (programmability)
- Οι απαντήσεις δεν πρέπει να διαχωρίζονται από ομοιόμορφά επιλεγμένες τιμές.
- Στο πραγματικό πρωτόκολλο το τυχαίο μαντείο αντικαθίσταται από μία πραγματική συνάρτηση (πχ. SHA256)

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν το πρόβλημα RSA είναι δύσκολο, τότε οι υπογραφές RSA-FDH παρέχουν ασφάλεια έναντι υπαρξιακής πλαστογράφησης με επιλεγμένα μηνύματα (EUF-CMA) στο μοντέλο του τυχαίου μαντείου.

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν υπάρχει αντίπαλος F ο οποίος παράγει πλαστογράφηση στο RSA-FDH με πιθανότητα τουλάχιστον p_F μετά από q_H ερωτήματα στο τυχαίο μαντείο, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε αντίπαλο R ο οποίος λύνει το πρόβλημα RSA με πιθανότητα $p_R \geq \frac{p_F}{q_H}$.

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH Επίθεση χωρίς μήνυμα

- Ο F μπορεί να κατασκευάσει πλαστογράφηση
- Θα κατασκευάσουμε αντίπαλο R που με χρήση του F και του RO θα λύσει το πρόβλημα RSA.
  - Είσοδος R: $(e, n), y \in \mathbb{Z}_n^*$
  - Έξοδος R: $y^{e^{-1}}$, χωρίς γνώση του d
- Υπόθεση: Για την πλαστογράφηση (m^*, σ^*) έχει ερωτηθεί προηγουμένως το RO για το m^*
- Συνέπεια: Αν σ^* είναι έγκυρη υπογραφή τότε: $\boldsymbol{\sigma^{*e} = H(m^*)}$
- Άρα: $\boldsymbol{\sigma^* = H(m^*)^{e^{-1}}}$
- Ο R πρέπει να μαντέψει πότε ο F θα ρωτήσει το m^* στο RO.

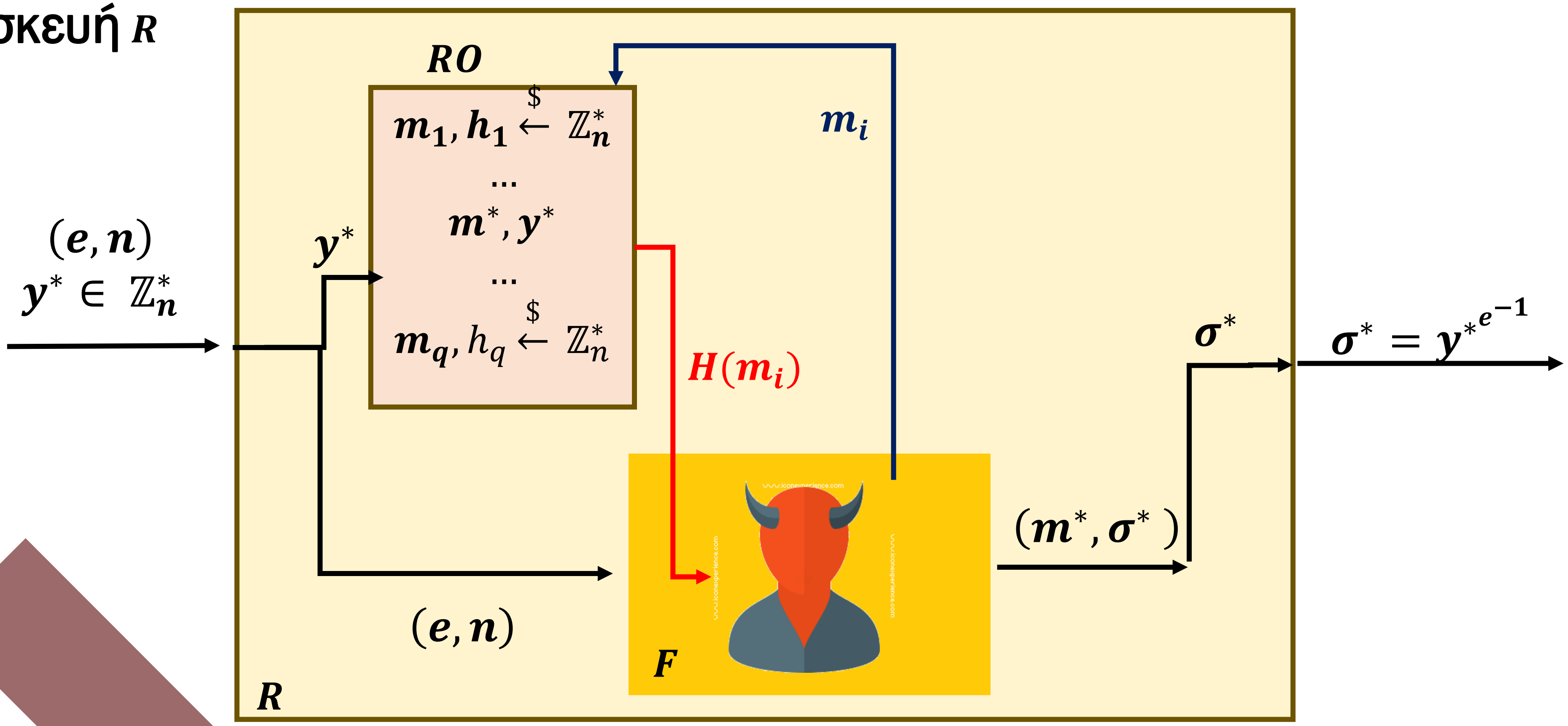
Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH Επίθεση χωρίς μήνυμα

- Ο R απαντάει τις ερωτήσεις για το m_i με $h_i \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_n^*$ για $i \in [q_H]$
- Δηλαδή $H(m_i) = h_i$
- Ο R μαντεύει ότι η πλαστογράφηση θα γίνει στο ερώτημα j
- Δηλαδή $m^* = m_j$
- Πιθανότητα να έχει μαντέψει σωστά ${}^{1}/_{q_H}$
- Τότε απαντάει με y^*
- Δηλαδή $H(m_j) = y^*$
- Αν ο F κάνει πλαστογράφηση στο ερώτημα j τότε σ^* έγκυρη υπογραφή
- Δηλαδή $\sigma^* = H(m_j)^{e^{-1}} = {y^*}^{e^{-1}}$
- Πιθανότητα πλαστογράφησης $\geq p_F$
- Πιθανότητα πλαστογράφησης στο j ερώτημα $\geq p_F / q_H$

$$\sigma^{*e} = H(m^*) \Rightarrow$$
$$\sigma^* = H(m^*)^d = H(m^*)^{e^{-1}}$$

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH Επίθεση χωρίς μήνυμα

Κατασκευή R



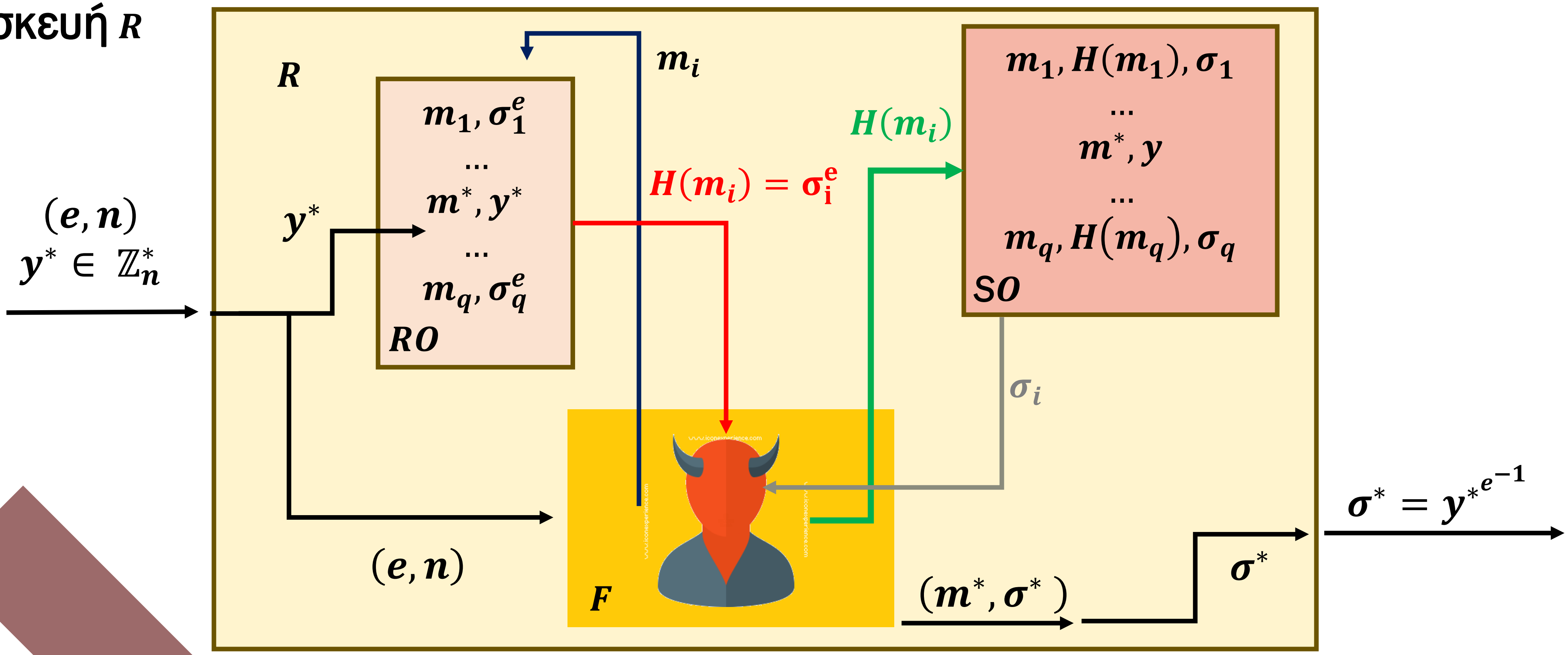
Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH Επίθεση χωρίς μήνυμα

- Ασυμπτωτικά έχουμε:
  - $q_H \in poly(\lambda)$ γιατί ο F είναι PPT.
  - Αν το πρόβλημα RSA είναι δύσκολο:
    - $p_R \in negl(\lambda)$
  - Άρα:
    - $p_F \leq p_R \cdot q_H \in negl(\lambda)$
- Πρακτικά υπάρχει απώλεια ασφάλειας q_H:
  - Π.χ. αν $p_R = 2^{-60}$ και $q_H = 2^{50}$ τότε $p_F \leq 2^{-10}$

$$\sigma^{*e} = H(m^*) \Rightarrow$$
$$\sigma^* = H(m^*)^d = H(m^*)^{e^{-1}}$$

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος (CMA)

Κατασκευή R



Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος (CMA)

- Ο F ζητάει συνόψεις **ΚΑΙ υπογραφές** από τον R
- Ο R δεν μπορεί να υπογράψει εφόσον δεν γνωρίζει το $sk = d$
- Θα εκμεταλλευτεί ότι μπορεί να προσομοιώσει το RO
- Ερώτηση για $H(m)$
  - Επιλογή $\sigma \in \mathbb{Z}_n^*$ και επιστροφή σ^{e}
  - Αποθήκευση τριάδας: (m, σ, σ^e)
- Ερώτηση για $Sign(m)$
  - Ανάκτηση σ από την τριάδα(m, σ, σ^e)
- Τετριμμένα:
  - $\sigma^e = (\sigma^e) = H(m)$
- Άρα σ είναι έγκυρη υπογραφή!

Κριτική μοντέλου τυχαίου μαντείου

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Άχρηστη’ απόδειξη: Καμία πραγματική συνάρτηση H δεν είναι random oracle
- Programmability: Η περιγραφή της H είναι σταθερή στην πραγματικότητα
- Ύπαρξη ’θεωρητικών’ σχημάτων τα οποία αποδεικνύονται ασφαλή, αλλά οποιαδήποτε κατασκευή τους είναι μη ασφαλής

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

- Η απόδειξη εστιάζει στο πρωτόκολλο και όχι στο H
- Απόδειξη με χρήση τυχαίου μαντείου είναι καλύτερη από απουσία απόδειξης
- Η μόνη αδυναμία: η συνάρτηση σύνοψης
- Δεν υπάρχουν πραγματικές επιθέσεις που να έχουν εκμεταλλευτεί την απόδειξη μέσω τυχαίου μαντείου

Υπογραφές
με βάση τον
Διακριτό Λογάριθμο

Υπογραφές ElGamal

- Δημιουργία Κλειδιών:
  - $KGen(1^{\lambda}) \to (sk, vk) = \langle x, (Y, g, p) \rangle$
  - Επιλογή πρώτου p μήκους λ bits
  - $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_p^*$ με γεννήτορα g
  - $x \stackrel{\$}{\leftarrow} \{2, \cdots . p-2\}$
  - $Y \leftarrow g^x \bmod p$

- Επαλήθευση
  - $Vf(Y, m, \sigma) \to Y^r r^s = g^m \pmod p$

- Υπογραφή
  - $Sign(x, m) \to \sigma = (r, s)$
    - Επιλογή εφήμερου κλειδιού
      - $k \stackrel{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_{p-1}^* \; (\mathrm{gcd}(\mathrm{k}, \mathrm{p}-1) = 1)$
    - $r \leftarrow g^k \bmod p$
    - $s \leftarrow (m - xr)k^{-1} \bmod (p-1)$
    - Επανάληψη μέχρις ότου $s \neq 0 \bmod (p-1)$
    - Η υπογραφή είναι $\sigma = (r, s)$ με μέγεθος 2λ bits

Ορθότητα: $Y^r r^s = Y^r g^{k(m-xr)k^{-1}} = Y^r g^m Y^{-r} = g^m \pmod p$

Παρατηρήσεις

- Πιθανοτικό σχήμα υπογραφής
  - πολλές έγκυρες υπογραφές για το ίδιο μήνυμα m (διαφορετικά k)
  - Η συνάρτηση επαλήθευσης δέχεται οποιαδήποτε από αυτές ως έγκυρη
- Χειρισμός Τυχαιότητας
  - Το r δεν εξαρτάται από το μήνυμα
  - Το τυχαία επιλεγμένο k πρέπει να κρατείται κρυφό
  - Αλλιώς:
    - ανάκτηση x από $s = (m - xr)k^{-1} \pmod{(p - 1)}$
- Η επανάληψη του ίδιου k σε διαφορετικές υπογραφές καθιστά εφικτό τον υπολογισμό του

Επαναχρησιμοποίηση Τυχαιότητας

- Έστω δύο υπογραφές σ_1, σ_2 με το ίδιο k
- $\sigma_1 = (r, s_1) = (g^k, (m_1 - xr)k^{-1}\ mod\ (p-1))$
- $\sigma_2 = (r, s_2) = (g^k, (m_2 - xr)k^{-1}\ mod\ (p-1))$
- Υπολογισμός: $s_1 - s_2 = (m_1 - m_2)k^{-1} \Rightarrow (s_1 - s_2)k = m_1 - m_2\ (mod\ (p-1))$
- Αν $\gcd((s_1 - s_2), (p-1)) = 1$ τότε $k = (m_1 - m_2)\,(s_1 - s_2)^{-1}$
- Αλλιώς εύρεση με δοκιμές από τις $\gcd((s_1 - s_2), (p-1))$ λύσεις ελέγχοντας αν $g^k = r$.

Επαναχρησιμοποίηση Τυχαιότητας

- Αναλυτικά:
- Έστω $d = gcd(s_1 - s_2, p - 1)$
- $d|(p - 1)$ και $d|(s_1 - s_2)$. Άρα $d|(m_1 - m_2)$
- Θέτουμε $m' = \frac{m_1 - m_2}{d}$, $s' = \frac{s_1 - s_2}{d}$, $p' = p - 1$
- Άρα: $s'k = m' \ (mod\ p')$ και $k = m's'^{-1} \ (mod\ p')$ αφού $\gcd(s', p') = 1$
- d λύσεις: $k = m'(s') - 1 + ip' \ (\mathrm{mod}\ p - 1)$ με $i \in \{0, \cdots, d - 1\}$
- Δοκιμάζουμε ποια από αυτές επαληθεύει την $r = g^k \ (mod\ p)$

Επιθέσεις πλαστογράφησης

- No-message attack
  - Επιλογή r, s
    - Εύρεση m: $Y^r \cdot r^s = g^m$ – Επίλυση DLOG
- Chosen message attack
  - Επιλογή m, r
    - Εύρεση s: $r^s = g^m Y^{-r}$ - Επίλυση DLOG
  - Επιλογή m, s
    - Εύρεση r: $Y^r \cdot r^s = g^m$ - Δύσκολο πρόβλημα – Άγνωστη η σχέση του με DLOG
  - Επιλογή m, r, s ταυτόχρονα:
    - $r = g^i Y^j \pmod{\mathrm{p}}$ για $i, j \in \{0, \dots, p-2\}$, $\gcd(\{j, i\}, p-1) = 1$
    - $s = -r \cdot j^{-1} \pmod{\mathrm{p} - 1}$
    - $m = s \cdot i \pmod{\mathrm{p} - 1}$
    - Έγκυρη υπογραφή: $Y^r \cdot r^s = Y^r (g^{is} Y^{js}) = Y^r (g^m Y^{-r}) = Y^r$
    - Υπαρξιακή πλαστογράφηση – Επίλυση με συνάρτηση σύνοψης.

Εύρεση έγκυρης υπογραφής (m, σ).

$$Y^r \cdot r^s = g^m$$

Υπογραφές Schnorr

Αποδείξεις μηδενικής γνώσης **του ιδιωτικού κλειδιού** υπογραφής που λαμβάνουν υπ’ όψιν και το μήνυμα

Δημόσια Είσοδος: $g \in \mathbb{G},\ ord(\mathbb{G}) = q, pk \in \mathbb{G}$

Ιδιωτική Είσοδος: $sk \in \mathbb{Z}_q : Y = g^{sk}$

Τα βήματα του P

1. Επιλογή $t \leftarrow \$\, \mathbb{Z}_q$ και υπολογισμός $T = g^t$
2. **Υπολογισμός** $\boldsymbol{c \leftarrow H(g, pk, T, m)}$
3. Υπολογισμός $s \leftarrow t + c \cdot sk$
4. Η υπογραφή είναι: $\sigma = (c, s)$
5. Επαλήθευση (**από οποιονδήποτε**) αν και μόνο αν

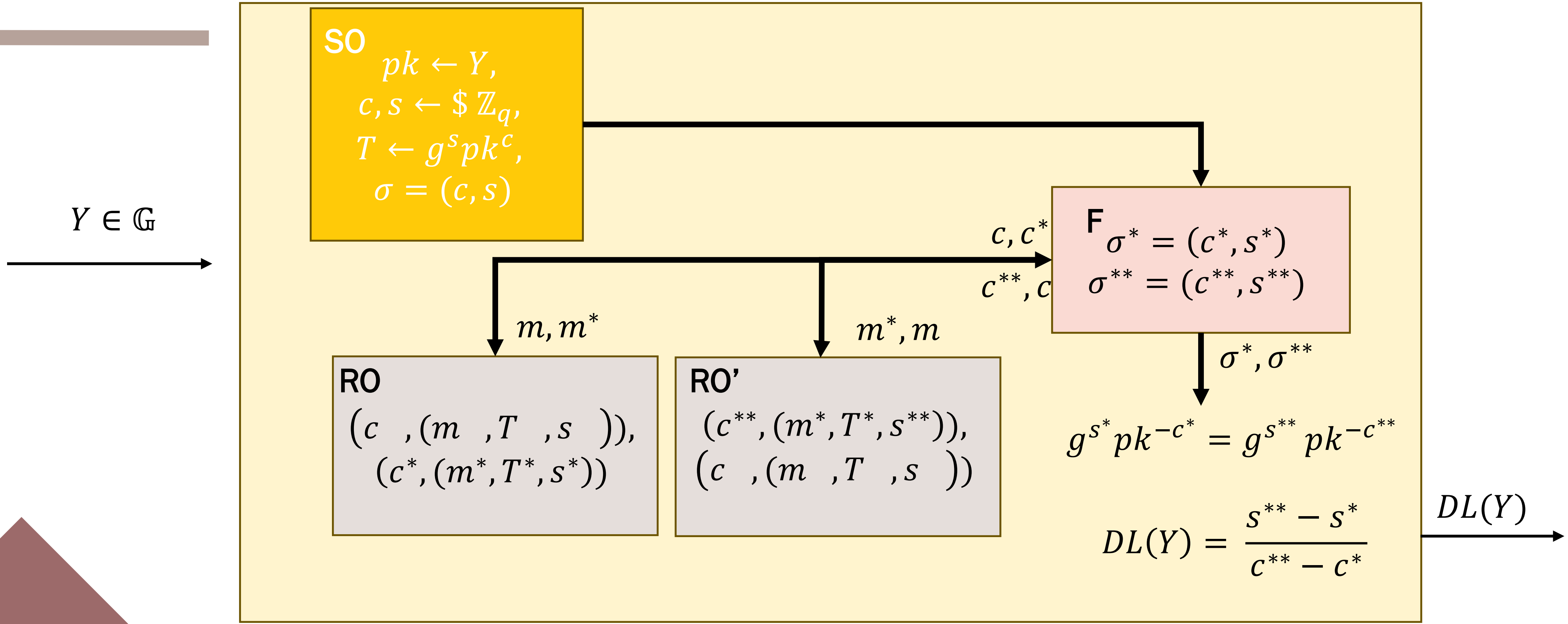
$$c = H(g, pk, g^s pk^{-c}, m)$$

Pointcheval, D., Stern, J. (1996). Security Proofs for Signature Schemes. In: Maurer, U. (eds) Advances in Cryptology — EUROCRYPT '96. EUROCRYPT 1996. Lecture Notes in Computer Science, vol 1070. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-68339-9_33

Απόδειξη Ασφάλειας (Γενικά)

- Βασίζεται στην ειδική ορθότητα του Σ-πρωτοκόλλου του Schnorr
  - Ίδιο commitment, διαφορετικά challenges, responses
  - Εύρεση witness - διακριτού λογαρίθμου pk (ιδιωτικό κλειδί)
- Chosen – message attack:
  - Προσομοίωση SO με χρήση simulator του Σ-πρωτοκόλλου
  - $T \leftarrow g^s pk^c$
- Random Oracle: Είσοδος (g, pk, T, m) Απάντηση με $c \leftarrow \$\ \mathbb{Z}_q$
- Η αναγωγή μαντεύει σε ποιο ερώτημα (g, pk, T^*, m^*) αντιστοιχεί η πλαστογράφηση και απαντάει με c^*
- Μετά την πλαστογράφηση (T^*, s^*), η αναγωγή κάνει rewind τον F πριν την ερώτηση που απαντήθηκε με c^*
- **Oracle Replay Attack:** Στο ερώτημα (g, pk, T^*, m^*) θα δοθεί απάντηση $c^{**} \neq c^*$
- **Forking Lemma:** Με μη αμελητέα πιθανότητα θα ξαναδοθεί πλαστογράφηση (T^*, s^{**})
- Επίλυση διακριτού λογαρίθμου

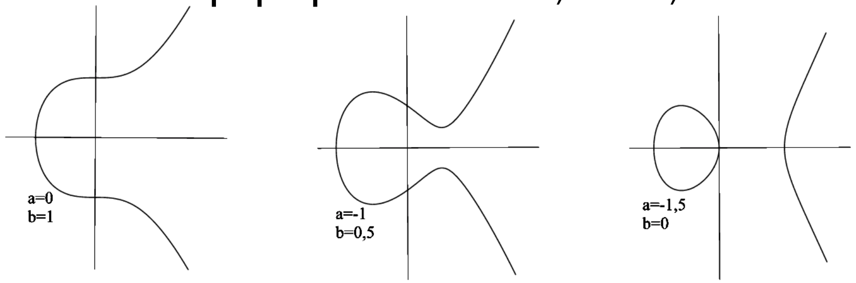
Απόδειξη Ασφάλειας (Γενικά)

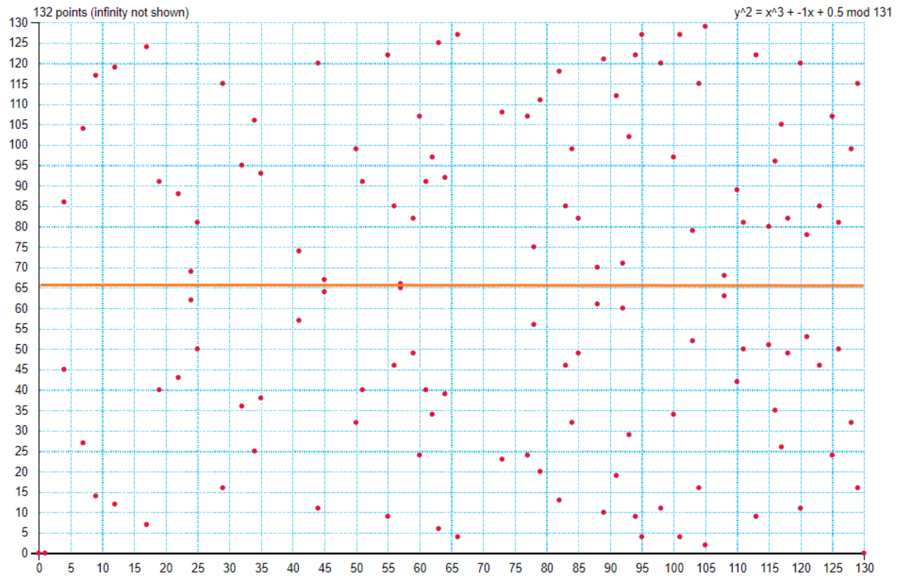


Pointcheval, D., Stern, J. (1996). Security Proofs for Signature Schemes. In: Maurer, U. (eds) Advances in Cryptology — EUROCRYPT '96. EUROCRYPT 1996. Lecture Notes in Computer Science, vol 1070. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-68339-9_33

Υπογραφές ECDSA

- Προέλευση: DSA (NIST 1991)
  - Στόχος: Παράκαμψη πατέντας Schnorr
  - Παραλλαγή του ElGamal, λειτουργία σε υποομάδα τάξης 2^{160}
- ECDSA
  - Υλοποίηση με ελλειπτικές καμπύλες
  - Χρήση σε Bitcoin, SSL, SSH





- Δεν υπάρχει απόδειξη ασφάλειας!

Υπογραφές ECDSA

Υπογραφή $Sign(x, m) \rightarrow \sigma = (r, s)$

- Υπολογισμός σύνοψης του μηνύματος $h = H(m)$ και προσαρμογή της στο $[0, \dots, q - 1]$
- Επιλογή εφήμερου κλειδιού $k \xleftarrow{\$} \{1, \cdots, q - 1\}$
- Υπολογισμός του σημείου $P = kG = (x_P, y_P)$
- Υπολογισμός του $r = x_P \; mod \; q$
- Αν $r = 0 \; (mod \; q)$ τότε επανάληψη με καινούριο k
- $s \leftarrow (h + xr)k^{-1} \bmod q$
- Αν $s = 0 \; (mod \; q)$ τότε επανάληψη με καινούριο k
- Η υπογραφή είναι $\sigma = (r, s)$

Δημιουργία Κλειδιών:

- Δημόσια Διαθέσιμες Παράμετροι: $(p, a, b, \#\mathcal{E}, q, G)$
- Δουλεύουμε σε υποομάδα τάξης q στην καμπύλη
- $y^2 = x^3 + ax + b, \;\; a, b \in \mathbb{F}_p$ με σημείο βάσης το G
- Ιδιωτικό κλειδί: Ένας τυχαίος ακέραιος $x \in \{1, \cdots, q - 1\}$
- Δημόσιο κλειδί: Το σημείο $Y = xG \in \mathcal{E}$

Υπογραφές ECDSA

- Επαλήθευση
  - $h \leftarrow H(m)$
  - $u_1 \leftarrow s^{-1}h \bmod q$
  - $u_2 \leftarrow s^{-1}r \bmod q$
  - $P' \leftarrow u_1 G + u_2 Y$
  - Έγκυρη αν $r = x'_P \ (mod\ q)$

Ορθότητα:

$$u_1 G + u_2 Y = s^{-1}(h + xr)G = s^{-1}ksG = kG = P$$

Υπολογισμός του σημείου P με δύο διαφορετικούς τρόπους

ECDSA Malleability

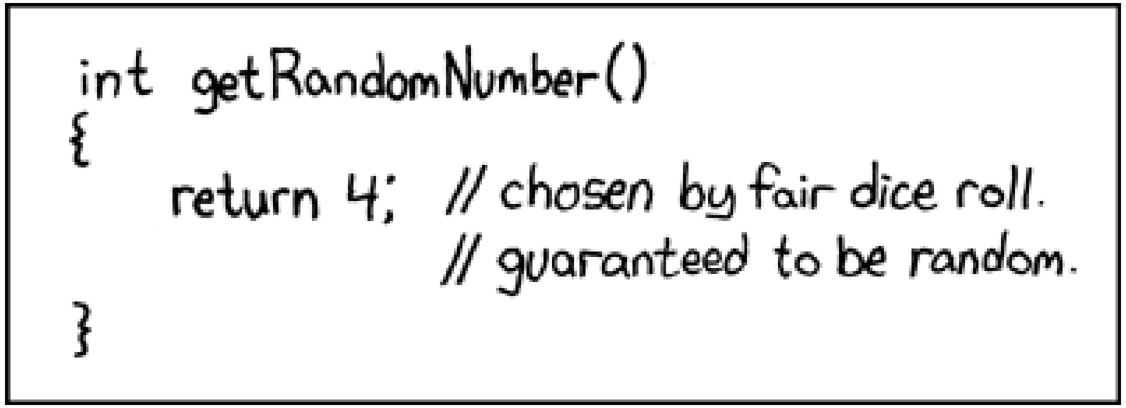
- Όχι SUF – CMA

- Αν (r, s) έγκυρη υπογραφή τότε και $(r, -s)$ έγκυρη υπογραφή
  - Θα υπολογίζεται το σημείο $P'' = -P$
  - Το σημείο αυτό ανήκει στην καμπύλη λόγω συμμετρίας

- Επίσης
  - $P = u_1 G + u_2 Y \Rightarrow Y = (P - u_1 G) \cdot u_2^{-1} = r^{-1}(H(m) \cdot G \ - sP)$
  - Δηλαδή: Το δημόσιο κλειδί μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του (r, s)
  - Αν βρω μια έγκυρη υπογραφή, μπορώ να αλλάξω $(r, s), m$ ώστε να βρω μια έγκυρη υπογραφή για διαφορετικό κλειδί

ECDSA Nonce reuse

- Επιλογή διαφορετικού κλειδιού k ανά υπογραφή
  - Αλλιώς: Ανάκτηση ιδιωτικού κλειδιού
- Δύο υπογραφές $(r_1, s_1)(r_2, s_2)$ με κοινό k
  - $r_1 = r_2 = x_{kG}$
  - $s_1 - s_2 = k^{-1}(h_1 - h_2) \ mod \ q$
  - $k = (h_1 - h_2)(s_1 - s_2)^{-1} \ mod \ q$
  - $x = (ks_1 - h_1)r^{-1} mod \ q$
- Sony Playstation 3 Hack (2011)



xkcd: Random Number

Υπογραφές edDSA

- Daniel J. Bernstein, Niels Duif, Tanja Lange, Peter Schwabe, and Bo-Yin Yang (2012)
- Υπογραφές Schnorr σε ελλειπτικές καμπύλες Edwards (μετά τη λήξη της πατέντας)
- Ντετερμινιστική τυχαιότητα κατά την υπογραφή
- Γεννήτρια τυχαιότητας μόνο κατά τη δημιουργία κλειδιών

edDSA – Δημιουργία κλειδιών

- Δημόσια διαθέσιμες παράμετροι
  - $(q = 2^{255} - 19, \mathcal{E} = -x^2 + y^2 = 1 - \frac{121655}{121666}x^2y^2, G)$
- Επιλογή κλειδιών
  - $k \xleftarrow{\$} \{0,1\}^{256}$
  - $h = H(k)$ με $\mathrm{H}\colon\ \mathrm{SHA} - 512$
  - Κλειδί υπογραφής: $x \leftarrow h[0..255]$
  - Κλειδί τυχαιότητας: $r \leftarrow h[256..511]$
  - Δημόσιο κλειδί $Y = xG$
  - Ιδιωτικό κλειδί $sk = (x, r)$

edDSA – Υπογραφή & Επαλήθευση

- Ντετερμινιστική τυχαιότητα
  - $r_m \leftarrow H(r||m)$
- Υπογραφή Schnorr
  - $R_m \leftarrow r_m G$
  - $c \leftarrow H(pk, R_m, m)$
  - $s \leftarrow r_m + cx \bmod \mathrm{q}$
  - $\sigma = (R_m, s)$
- Επαλήθευση
  - $c' \leftarrow H(pk, R_m, m)$
  - Έλεγχος αν $sG = R_m + c'pk$
- Ίδιο μήνυμα – ίδια υπογραφή

Αυθεντικότητα Κλειδιών

Πρακτική χρήση ψηφιακών υπογραφών

- Διαφορά Συμμετρικών- Ασύμμετρων Κρυπτοσυστημάτων
  - Συμμετρικά: Δύσκολη διανομή, Εύκολη Αυθεντικότητα (λόγω φυσικών υποθέσεων)
  - Ασύμμετρα: Εύκολη διανομή, Δύσκολη Αυθεντικότητα
- Αντιστοιχία (?) Ταυτότητας Χρήστη- Δημοσίου, Ιδιωτικού Κλειδιού (binding)
- Ενεργός αντίπαλος- Πλαστοπροσωπία- αλλαγή κλειδιών
- Απαραίτητη η διασφάλιση για χρήση σε ευρεία κλίμακα
- Δεν υπάρχει λύση που να δουλεύει θεωρητικά και πρακτικά
- Στην πράξη: μετάθεση του προβλήματος με μείωση της έκτασης (αρκεί 1 αυθεντικό κλειδί)

Αρχές πιστοποίησης

- Έμπιστες Τρίτες Οντότητες- (Πάροχοι Υπηρεσιών Πιστοποίησης)
- Πιστοποίηση Αντιστοιχίας Ταυτότητας Κλειδιών
  - Εγγυάται ότι το δημόσιο κλειδί όντως αντιστοιχεί στον χρήστη
    - Πώς; Υπογράφοντας ‘ψηφιακά‘ το ζεύγος (ID, PK_{ID}) •
  - Πλεονέκτημα: Μείωση κλειδιών που πρέπει να αποκτήσουμε με έμπιστο τρόπο
    - Μόνο το κλειδί της CA
    - Για τα υπόλοιπα ‘εγγύαται‘ το πιστοποιητικό
  - Μειονέκτημα: Ποιος εγγυάται την σχέση κλειδιών-ταυτότητας για την CA;
    - Η ίδια! (υπογράφει η ίδια μία δήλωση για τον εαυτό της) ή
    - Μια άλλη ανώτερη αρχή πιστοποίησης

Υποδομή Δημοσίου Κλειδιού (PKI)

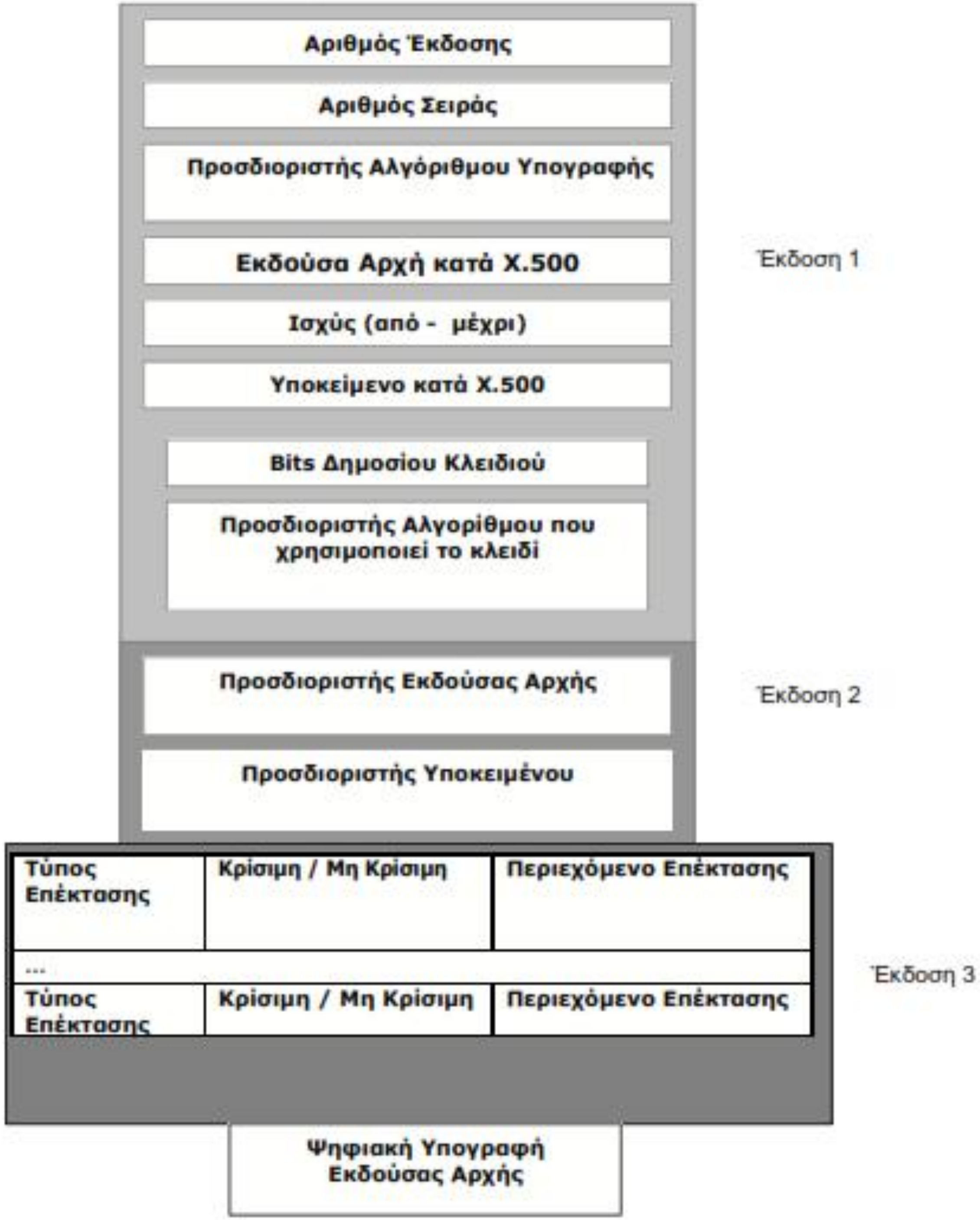
- Loren Kohnfelder, MIT BSc thesis, 1978
- Ιεραρχική οργάνωση δομών πιστοποίησης και των σχετικών υπηρεσιών
  - Ευρεία προτυποποίηση (ITU X.500, RFC 6818)
  - Ενδιάμεσες Αρχές: Υπογραφή από ανώτερη αρχή
  - Ριζικές (Root) Αρχές: Υπογράφουν μόνες τους
    - Συνήθως 3-4 επίπεδα
  - Ψηφιακό Πιστοποιητικό
    - Υπογραφή στο ζεύγος (ID, PK_{ID}) μαζί με άλλα στοιχεία

Ψηφιακά Πιστοποιητικά

Απόκτηση

- Προεγκατάσταση στο ΛΣ
- Προεγκατάσταση στον browser
- Απόκτηση από δημόσιο κατάλογο (web site)
- Απόκτηση από νομική οντότητα

Supply Chain attacks



Αρχές Πιστοποίησης – Άλλες υπηρεσίες

- Ανάκληση πιστοποιητικών
  - Απώλεια κλειδιού υπογραφής
  - Αλλαγή Στοιχείων Υποκειμένου
  - Ενημέρωση Χρηστών με 2 τρόπους
    - Certificate Revocation Lists (CRL):
      - ‘Μαύρη‘ λίστα από SN για πιστοποιητικά που δεν ισχύουν
      - Υπογεγραμμένη από την CA
      - Ανάκτηση σε τακτά χρονικά διαστήματα
    - OCSP (Online Certificate Status Protocol)
      - Ερώτηση στην CA για ισχύ πιστοποιητικού
      - Η CA συμμετέχει σε κάθε συναλλαγή

- Διάδοση Πιστοποιητικών σε αποθετήρια
- Εγγραφή-Επαλήθευση Ταυτότητας Χρηστών
- Δημιουργία κρυπτογραφικών κλειδιών (αυστηρές προδιαγραφές ασφάλειας)
- Χρονοσήμανση- Αρχειοθέτηση

Web of Trust (PGP)

Ομότιμη έκδοση και επαλήθευση ταυτότητας (web of trust)

- Κάθε χρήστης είναι CA
- Υπογράφει αντιστοιχίες που γνωρίζει
- Λήψη πιστοποιητικών μόνο από γνωστούς χρήστες
- Ο κάθε χρήστης ‘εγγυάται‘ για τους γνωστούς του

Identity – Based Crypto

Signatures: Shamir (1984)

Encryption: Boneh-Franklin (2001)

- Οποιοδήποτε όνομα κάποιου χρήστη πχ. email είναι η ταυτότητα
- Δεν χρειάζεται διανομή κλειδιού
- Χρειάζεται κεντρική TTP
- Παράγει τα ιδιωτικά κλειδιά από την ταυτότητα

Identity Based Signatures

- TTP έχει κλειδί RSA $((e, n), d)$
- Δημιουργία ιδιωτικού κλειδιού από ταυτότητα χρήστη id
- Υπογραφή σύνοψης της ταυτότητας $k = H(id)^d \bmod n$
- Ασφαλής Διανομή στον κάτοχο
- Υπογραφή από χρήστη id
  - Επιλογή τυχαίου r
  - Υπολογισμός $t = r^e \bmod \mathrm{n}$
  - $s = k \cdot r^{H(m,t)} \bmod \mathrm{n}$
- Η υπογραφή είναι (t, s)
- Επαλήθευση υπογραφής με την ταυτότητα:
- Έλεγχος αν: $H(id)t^{H(m,t)} = s^e$
- Ορθότητα:
  - $s^e = k^e r^{eH(m,t)} = H(id)t^{H(m,t)}$

Ψηφιακές Υπογραφές με ιδιωτικότητα

Τυφλές Υπογραφές

Υπογραφές Δακτυλίου

Motivation

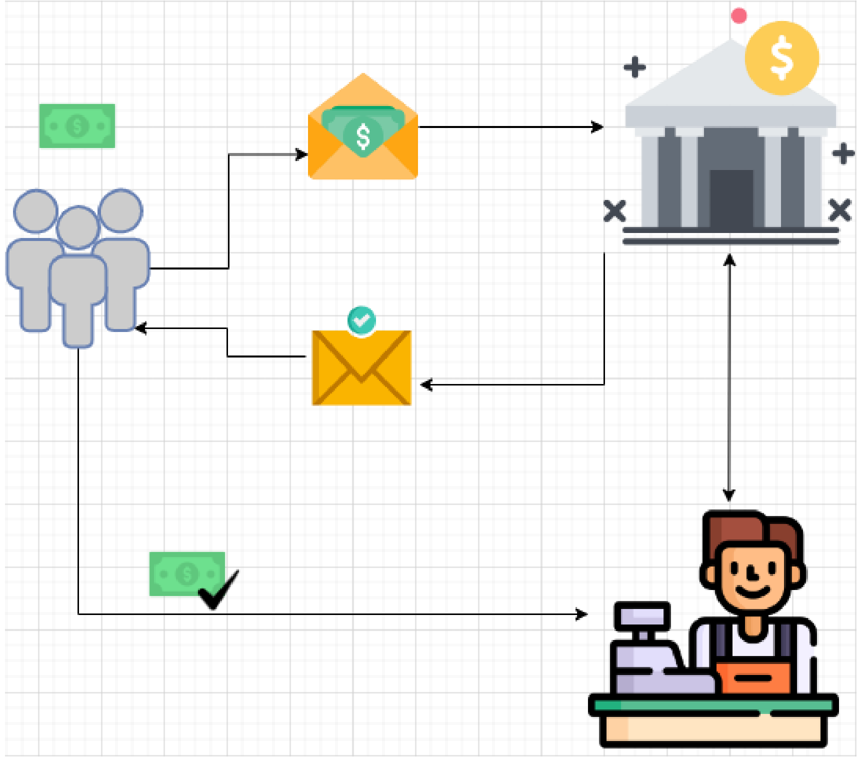
- Ψηφιακές Υπογραφές:
  - Ακεραιότητα
  - Αυθεντικότητα
  - Μη Αποκήρυξη
  - Δημόσια επαληθευσιμότητα
  - Χωρίς ιδιωτικότητα όμως…

- Ο υπογράφων
  - βλέπει το μήνυμά που υπογράφει και
  - μπορεί να συσχετίσει την υπογραφή με το αίτημα δημιουργίας της
- Το δημόσιο κλειδί επαλήθευσης προδίδει τον signer.
- Τα παραπάνω δεν είναι επιθυμητά σε πολλές εφαρμογές
  - Ηλεκτρονικό χρήμα
  - Ηλεκτρονικές ψηφοφορίες
  - Whistleblowing

Υπογραφές για ηλεκτρονικό χρήμα

- Νόμισμα $c \xleftarrow{\$} \{0,1\}^*$
- Ο Αγοραστής ζητάει από την Τράπεζα υπογραφή σε ένα νόμισμα c.
  - Αποφυγή double, overspending
  - Συγκεκριμένη αξία ανά υπογραφή
- Ο Αγοραστής αγοράζει κάτι από τον Πωλητή με το c.
- Ο Πωλητής επικοινωνεί με την τράπεζα για να βεβαιώσει ότι το c δεν έχει ξαναξοδευτεί.
- Αν δεν έχει ξαναξοδευτεί το δέχεται και ολοκληρώνει τη συναλλαγή.
- Η Τράπεζα μαρκάρει το νόμισμα c ως ξοδεμένο.
- Αργότερα ο Πωλητής παίρνει από την τράπεζα την αξία του c.
- Όμως: Η Τράπεζα γνωρίζει πού ξοδεύτηκε το νόμισμα

Τυφλές Υπογραφές



- Φάκελος με καρμπόν
- Το νόμισμα μπαίνει σε φάκελο
- Η τράπεζα υπογράφει τον φάκελο
  - Αφού ελέγξει επαρκές υπόλοιπο
- Η υπογραφή μεταφέρεται στο νόμισμα
- Το νόμισμα βγαίνει από τον φάκελο
  - Με την υπογραφή
- Ξοδεύεται (αν δεν έχει ξοδευτεί ήδη)
  - Επαλήθευση υπογραφής
- Η τράπεζα δεν μπορεί να συσχετίσει νόμισμα με φάκελο

Τυφλές Υπογραφές

Σχήμα τυφλών υπογραφών:

- τριάδα $\Pi = (KGen, Sign, Vf)$
- $(sk, vk) \leftarrow KGen(1^\lambda)$
  - Δημιουργία κλειδιών και κρυπτογραφικών παραμέτρων
- $\sigma \leftarrow \mathbf{Sign}\langle S(sk), U(m), vk\rangle$
  - Το **Sign** είναι **πρωτόκολλο** και όχι αλγόριθμος. Συνήθως:
    - $m' \leftarrow Blind(m, vk)$ εκτελείται από τον U
    - $\sigma' \leftarrow Sign(m', sk)$ όπου ο S εκτελεί **αλγόριθμο** $Sign$
    - $\sigma \leftarrow Unblind(\sigma', vk)$ εκτελείται από τον U
- Επαλήθευση: $\{0,1\} \leftarrow Vf(m, \sigma, vk)$
- Ορθότητα: $Vf(m, \mathrm{Sign}\langle S(sk), U(m), vk\rangle, vk) = 1 \; για \; (sk, vk, prms) \leftarrow KGen(1^\lambda)$

Τυφλές υπογραφές RSA

- Δημιουργία Κλειδιών:
  - Όπως στο RSA. Τελικά: $(sk, vk) = (d, (e, n))$
- Υπογραφή:
  - $Blind(m, vk) \rightarrow H(m) \cdot r^e \ \mathbf{mod}\ n, r \leftarrow Z_n^*$
  - $Sign(m', sk) \rightarrow m'^d \mathbf{mod}\ n \rightarrow \left(H(m)^d r\right) \mathbf{mod}\ n$
  - $UnBlind(\sigma', vk) \rightarrow \sigma' r^{-1} \mathbf{mod}\ n \rightarrow H(m)^d \ \mathbf{mod}\ n$
- Επαλήθευση:
  - Η τελική υπογραφή είναι κανονική υπογραφή RSA

Μοντέλο Ασφάλειας Τυφλών Υπογραφών

- Τυφλότητα
  - Ο υπογράφων δεν μαθαίνει τίποτα για το μήνυμα
  - Ο αντίπαλος είναι ο υπογράφων
  - Πιο τυπικά:
    - Με δεδομένο ένα μήνυμα και μια υπογραφή ο αντίπαλος δεν πρέπει να μάθει από ποιο signing session προέκυψε.
  - Perfect Blindness
    - $\Pr\left[BGame_A\left(1^\lambda\right) = 1\right] = \frac{1}{2}$
  - Computational Blindness
    - $\Pr\left[BGame_A\left(1^\lambda\right) = 1\right] \leq \frac{1}{2} + negl(\lambda)$

BG (Blindness Game)

- $(vk, sk) \leftarrow KGen(1^\lambda)$
- $Send\ sk\ to\ A$
- $m_0, m_1 \leftarrow A(vk, sk)$
- $b \xleftarrow{\$} \{0,1\}$
- $\sigma_b \leftarrow \mathbf{Sign}\langle A(sk), U(m_b), vk\rangle$
- $\sigma_{1-b} \leftarrow \mathbf{Sign}\langle A(sk), U(m_{1-b}), vk\rangle$
- `If` $\boldsymbol{Vf(pk, m_b, \sigma_b) = 1}$ **and** $\boldsymbol{Vf(pk, m_{1-b}, \sigma_{1-b}) = 1}$ `then`
  - $b \leftarrow A(\sigma_b, \sigma_{1-b})$
  - `return` $b = b'$
- `Else`
  - `return 0`

Μοντέλο Ασφάλειας Τυφλών Υπογραφών

- Unforgeability
  - Δεν έχει νόημα το μοντέλο των κλασικών υπογραφών (EUF-CMA).
    - Ο S δημιούργησε (m', σ')
    - Ο U από αυτό έφτιαξε (m, σ)
    - για το οποίο $Vf(m, \sigma, vk) = 1$
    - Δηλ. ο U έφτιαξε έγκυρη υπογραφή χωρίς να έχει ιδιωτικό κλειδί
    - Άρα έκανε πλαστογράφηση

Μοντέλο Ασφάλειας Τυφλών Υπογραφών

- Unforgeability με βάση τη χρήση
  - Στο ηλεκτρονικό χρήμα δεν θέλουμε να μπορούν να δημιουργηθούν περισσότερα χρήματα από όσα υπέγραψε η τράπεζα
  - Αντίπαλος ο χρήστης!
  - Έχοντας λάβει l υπογραφές από τον signer, ο χρήστης δεν μπορεί να παρουσιάσει $l+1$ έγκυρες
  - One-more unforgeability

OMUF (One-More Unforgeability Game)

- $(vk, sk) \leftarrow KGen(1^\lambda)$
- $(m_i, \sigma_i) \leftarrow \mathbf{Sign}\langle S(sk), A(m_j), vk\rangle$ με $i \in [l+1]$ και $j \in [k]$
- `If` $\boldsymbol{Vf(pk, m_i, \sigma_i) = 1\ \forall i \in [l+1]}$ and $m_i's$ **are distinct** and $k \leq l$ `then`
  - `return 1`
- `Else`
  - `return 0`

l: Το μέγιστο πλήθος των sessions $\langle S, A\rangle$.
Μπορούν να είναι σειριακά ή **παράλληλα!**

Ομαδικές Υπογραφές

- Η υπογραφή προέρχεται από μια ομάδα, όπου υπάρχει αρχηγός
- Διατηρείται ανωνυμία, ως προς το ποιο μέλος υπέγραψε
- Τα μέλη ορίζονται εξ' αρχής από τον αρχηγό
- Δυναμική ομάδα: Μπορούν να ανακληθούν (revocation) ή να προστεθούν καινούρια
- Ο αρχηγός μπορεί να αποκαλύψει ποιος υπέγραψε (traceability)

Υπογραφές δακτυλίου

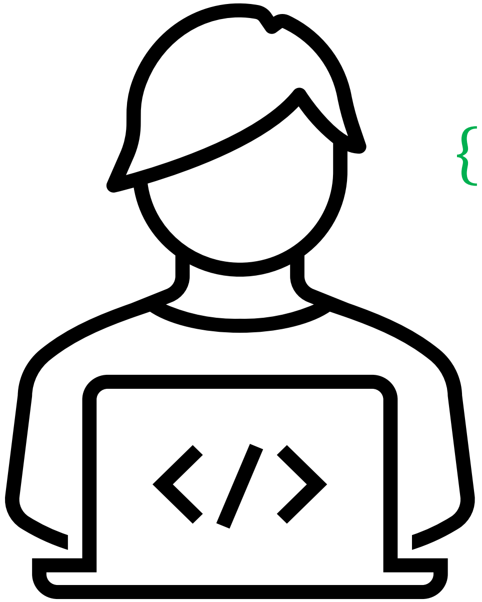
- Η Alice είναι μέλος του υπουργικού συμβουλίου και θέλει να αποκαλύψει ένα σκάνδαλο στον δημοσιογράφο Bob
- Ο Bob θέλει να πειστεί ότι η αποκάλυψη έρχεται από κάποιο μέλος του υπουργικού συμβουλίου Η Alice δεν μπορεί να υπογράψει κάποιο μήνυμα, γιατί θα αποκαλυφθεί από την επαλήθευση
- Δημιουργία δακτυλίου με (όλα τα) δημόσια κλειδιά των υπουργών
- Υπογραφή προέρχεται από το δακτύλιο έγκυρη, αλλά χωρίς να είναι δυνατόν να αποκαλυφθεί ποιο μέλος του υπέγραψε
- Ad-hoc επιλογή δακτυλίου

Υπογραφές δακτυλίου

- Κατασκευή από OR-proofs
  - Σ-πρωτόκολλα ότι ο υπογράφων γνωρίζει το ιδιωτικό κλειδί για ένα από τα n δημόσια κλειδιά των μελών του δακτυλίου
    - Για όσα δεν το γνωρίζει χρήση του Simulator
  - Χρόνος δημιουργίας $O(n)$
  - Μέγεθος υπογραφής $O(n)$
  - Χρόνος επαλήθευσης $O(n)$
  - Πολλές προσπάθειες μείωσης

Υπογραφές δακτυλίου

$\mathrm{R} = \{\mathrm{Y}_1. \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{n}\}$



$\mathrm{T}_\kappa = g^{t_\kappa},$

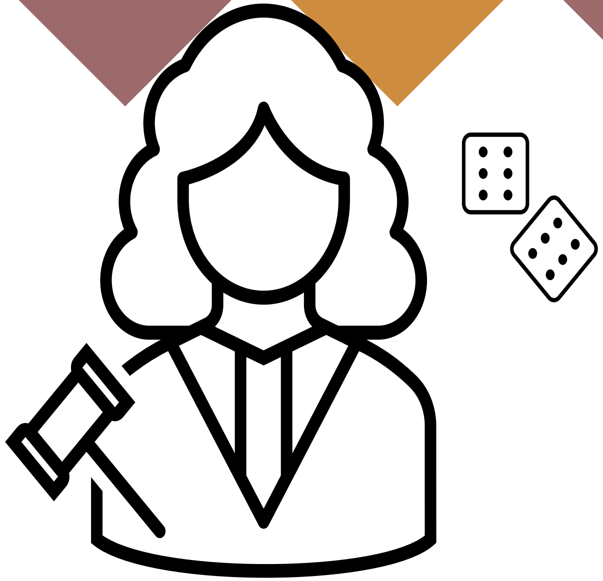
$\{\ \mathrm{T}_\mathrm{i} = g^{c_i} Y_i^{-t_i}, t_i, c_i \overset{\$}{\leftarrow} \mathbb{Z}_q\}, i \in [n]/\{k\}$

$c \leftarrow H(R, \boldsymbol{m}, \{T_i\}_{i=1}^{n})$

$c_k \leftarrow c - \sum_i c_i \mod \mathrm{q}$

$s_k \leftarrow (t_k + c_k x_k) \mod q$

$s_i \leftarrow t_i, i \in [n]/\{k\}$



$\forall i \in [n]\ g^{s_i} =_? T_i Y_i^{c_i}$ και $c = \sum_i c_i \mod \mathrm{q}$